Kapitola 5

Hilbertův prostor

5.1 Základní vlastnosti

Historická poznámka 5.1.1. Prostor X se skalárním součinem je strukturou na *lineárním prostoru* s „nejsilnějšími" axiomy. Je to *normovaný* lineární prostor, v němž je norma definována pomocí tzv. *skalárního součinu.* Proto v něm můžeme využívat všech poznatků, se kterými jsme se v rámci metrických prostorů nebo normovaných lineárních prostorů seznámili. Skalární součin umožňuje zavést v prostoru se skalárním součinem navíc kolmost (ortogonalitu) prvků. Je-li tento prostor navíc úplný, budeme ho nazývat Hilbertův prostor. D. Hilbert (1862 – 1943) položil základy studia této struktury. Vznik teorie abstraktního Hilbertova prostoru se však klade až do r. 1927 a je spojován se jménem J. von Neumann (1903 – 1957). Látka o Hilbertově prostoru patří do tzv. *funkcionální analýzy* a je vykládána v mnoha učebnicích věnovaných této abstraktní části analýzy. Stručný výklad nejdůležitějších výsledků lze nalézt např. v [44] nebo [43].

Definice 5.1.2. Nechť X je lineární prostor nad tělesem K reálných nebo komplexních čísel s binární operací $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, která má následující vlastnosti:

Pro všechna $x, y, z \in X$ a všechna $\alpha, \beta \in K$ platí

$$(1)\quad (x,x) \geq 0\,, \qquad (2)\quad (x,x) = 0 \text{ právě když } x = 0\,,$$
$$(3)\quad (x,y) = \overline{(y,x)}\,, \qquad (4)\quad (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)\,.$$

Pak říkáme, že dvojice X spolu s $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ tvoří *prostor se skalárním součinem* (někdy též *unitární prostor*). Operaci $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ nazýváme *skalární součin na X* [1]).

Položíme $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$ a ukážeme, že takto definovaná funkce je opravdu *norma* na X, jak to odpovídá použitému označení běžnému v teorii normovaných lineárních prostorů. Skutečně, přímo z vlastností skalárního součinu a definice normy plyne, že pro všechna $x \in X$ je $\|x\| \geq 0$, přičemž $\|x\| = 0$, právě když $x = 0$. Pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in K$ je též $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$. K důkazu trojúhelníkové nerovnosti pro normu si připravíme užitečné lemma.

Lemma 5.1.3 (Schwarzova nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem, pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|\;; \tag{5.1}$$

rovnost v (5.1) *nastává, právě když jsou prvky $x, y \in X$ lineárně závislé.*

Důkaz. Pro $x = 0$ nebo $y = 0$ platí v (5.1) dokonce rovnost a x, y jsou lineárně závislé. Nerovnost rovněž triviálně platí pro $(x,y) = 0$. Při $y \neq 0$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{C}$ je

$$0 \leq (x - \alpha y, x - \alpha y) = \|x\|^2 - \alpha(y,x) - \overline{\alpha}(x,y) + \alpha\overline{\alpha}\|y\|^2\,. \tag{5.2}$$

[1]) Jde o další licenci, logičtější by bylo říkat *skalární součin na $X \times X$*.

Volme $\alpha = (x,x)/(y,x)$ a dosaďme do předchozí rovnosti; tak dostaneme

$$0 \le \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \frac{\|x\|^4}{|(y,x)|^2}\,\|y\|^2\,, \tag{5.3}$$

z čehož již plyne (5.1). Jestliže platí v (5.1) rovnost, platí postupně v (5.3) a také v (5.2), tedy $x - \alpha y = 0$, neboli $x = \alpha y$ a x, y jsou lineárně závislé. Abychom ukázali, že v (5.1) nastává rovnost, právě když jsou x, y lineárně závislé, zbývá vyšetřit případ nenulových závislých x, y. Pak existuje $\beta \in \mathbb{C}$ tak, že $x = \beta y$ a je

$$|(x,y)| = |(\beta y, y)| = |\beta| \cdot |(y,y)| = \|\beta y\| \cdot \|y\| = \|x\| \cdot \|y\|\,,$$

a tedy v (5.1) platí rovnost. Tím je důkaz tvrzení dokončen. □

Lemma 5.1.4 (trojúhelníková nerovnost). *Je-li X prostor se skalárním součinem a položíme-li $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$, pak pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí*

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x \pm y\| \le \|x\| + \|y\| \tag{5.4}$$

Důkaz. Podle (5.1) platí

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \big|\,(x+y, x+y)\,\big| &\le (x,x) + |(x,y)| + |(y,x)| + (y,y) \le \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = \big(\,\|x\| + \|y\|\,\big)^2\,,\end{aligned}$$

z čehož dostaneme odmocněním

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|\,. \tag{5.5}$$

Uvažme dále, že platí $\|x\| = \|x+y-y\| \le \|x+y\| + \|y\|$, a tedy $\|x\| - \|y\| \le \|x+y\|$. Ze symetrie dostáváme stejný odhad pro $\|y\| - \|x\|$ a spojením obou

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x+y\|\,; \tag{5.6}$$

nyní stačí ještě uvážit, že $\|y\| = \|-y\|$. Tím je trojúhelníková nerovnost (5.4) dokázána. □

Důsledek 5.1.5. *Funkce $x \mapsto \|x\| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in X$ definuje na X normu.*

Definice 5.1.6. Prostor se skalárním součinem, který je vzhledem k normě tímto součinem generované úplný, nazýváme *Hilbertův prostor.*

Příklad 5.1.7. Nejjednodušším příkladem Hilbertova prostoru je konečněrozměrný prostor l_2^m uspořádaných m-tic reálných nebo komplexních čísel, jestliže definujeme pro $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ skalární součin vztahem

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k}\,.$$

Snadno se ukáže, že součin má potřebné vlastnosti z Definice 5.1.2. Proto platí Cauchyho nerovnost

$$\Big|\,\sum_{k=1}^{m} x_k \overline{y_k}\,\Big| \le \Big(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{m} |y_k|^2\Big)^{1/2}\,. \tag{5.7}$$

Úplnost prostoru l_2^m je důsledkem úplnosti $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, protože konvergence v tomto lineárním prostoru je konvergencí „po souřadnicích“.

Historická poznámka 5.1.8. Existují tvary nerovnosti (5.1), spojované s několika jmény; to má následující kořeny: L. A. Cauchy (1789 – 1858) odvodil r. 1821 nerovnost (5.7), která je Schwarzovou nerovností (5.1) v konkrétním Hilbertově prostoru. V. Ja. Bunjakovskij (1804 – 1889) dokázal integrální variantu nerovnosti r. 1859. Nezávisle na něm k ní dospěl r. 1875 také H. A. Schwarz (1843 – 1921), který ji pak zobecnil r. 1885 i pro případ vícerozměrného integrálu.

Cvičení 5.1.9 (Cauchy 1821*). Nechť x_k, y_k, $k = 1, \dots, m$, jsou nezáporná čísla. Dokažte přímo (bez odvolání na Schwarzovu nerovnost), že pak platí

$$\sum_{k=1}^{m} x_k y_k \le \Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{1=1}^{m} y_k^2\Big)^{1/2}. \tag{5.8}$$

Návod: Pro $\|y\| = 0$ tvrzení platí. Zvolte libovolně x, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $y \neq 0$. Z nerovnosti $\sum_{k=1}^{m}(x_k + \alpha y_k)^2 \ge 0$, plyne, že pro diskriminant kvadratické rovnice s neznámou α

$$\sum_{1}^{m} x_k^2 + 2\alpha \sum_{1}^{m} x_k y_k + \alpha^2 \sum_{1}^{m} y_k^2 = 0$$

musí být nekladný.

Příklad 5.1.10 (důležitý). 0značme symbolem l_2 systém všech posloupností $x = \{x_k\}$ reálných nebo komplexních čísel x_k, $k \in \mathbb{N}$, pro něž platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\,. \tag{5.9}$$

Snadno lze nahlédnout, že l_2 je vzhledem k přirozeným definicím sčítání „člen po členu“ a násobení skalárem „člen po členu“ lineární prostor: pro každé $x \in l_2$ zřejmě platí rovnost $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^2 = |\alpha|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$, z níž plyne $\alpha x \in l_2$. Pro libovolná dvě čísla a, b vyplývá snadno z nerovnosti $(|a| - |b|)^2 \ge 0$ jednoduchý odhad $2|a||b| \le |a|^2 + |b|^2$, takže

$$|a + b|^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)\ . \tag{5.10}$$

Aplikujeme-li nerovnost (5.10) na x_k, y_k a sečteme pro všechna $k \in \mathbb{N}$, dostaneme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \le 2\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\Big) < \infty\ ,$$

což dokazuje, že prostor l_2 je uzavřený vzkledem ke sčítání. Chceme-li ukázat, že

$$(x, y) := x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}\ ,$$

definuje na l_2 skalární součin, stačí dokázat jeho konečnost pro každé dva prvky $x, y \in l_2$. K tomu stačí dokázat následující lemma.

Lemma 5.1.11. *Pro každé dvě posloupnosti $x, y \in l_2$ platí nerovnost*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\Big)^{1/2}. \tag{5.11}$$

Důkaz. Stačí uvážit, že podle (5.7) platí nerovnost s konečnými součty pro každé $m \in \mathbb{N}$. V nerovnosti (5.7) přejdeme k supremu přes všechna $m \in \mathbb{N}$ nejprve na pravé straně a tak dostaneme na pravé straně nekonečné řady; pak uděláme totéž na levé straně a po odmocnění obdržíme (5.11). □

Omezení (5.9) zaručuje, že pracujeme pouze s posloupnostmi, pro které jsou příslušný skalární součin a odpovídající norma konečné. Protože již víme, že l_2 je prostor se skalárním součinem, je přirozené se ptát, zda je tento prostor úplný, tj. zda je Hilbertovým prostorem. To se většinou dokazuje v daleko obecnějším kontextu, není však obtížné to dokázat přímo z definice.

Věta 5.1.12. *Prostor l_2 je úplný a je tedy Hilbertovým prostorem.*

Důkaz. Pro práci s posloupnostmi prvků z l_2 zavedeme další index n pro „celou posloupnost" a místo $x_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \dots\}$ budeme psát pomocí dvojitých indexů $\{x_{nk}\}$. Pro cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ prvků (posloupností) $x_n \in l_2$ platí: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $m, n \geq p$

$$\|x_m - x_n\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\, x_{mk} - x_{nk}\,|^2\Big)^{1/2} < \varepsilon\ . \tag{5.12}$$

Protože sčítáme nezáporná čísla, platí pak i $|x_{mk} - x_{nk}| < \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a tak $\{x_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ je pro každé $k \in \mathbb{N}$ cauchyovská posloupnost. Tyto posloupnosti „indexované parametrem k" konvergují stejnoměrně vzhledem ke $k \in \mathbb{N}$ k nějaké posloupnosti $x_0 = \{x_{0k}\}$. Vzhledem ke stejnoměrnosti v $k \in \mathbb{N}$ lze zaměnit v (5.12) limitní přechod pro $n \to \infty$ se sčítáním řady vzhledem ke sčítacímu indexu k, a tak „limitovat vzhledem k n" za znamením sumy. Dostaneme tak podle varianty Věty 15.3.3 z [67] z (5.12) odhad $\|x_m - x_0\| \leq \varepsilon$. Ukažme ještě, že tato posloupnost x_0 leží v prostoru l_2. Pro čtverec normy x_0, platí odhad

$$\|x_0\|^2 \leq \|x_0 - x_n + x_n\|^2 \leq 2\big(\|x_0 - x_n\|^2 + \|x_n\|^2\big)\ ,$$

což dává $x_0 \in l_2$. □

Poznámka 5.1.13. Čtenář patrně zná obecnou větu o zúplnění metrických prostorů. Uveďme bez důkazu, že každý prostor se skalárním součinem lze zúplnit a že toto zúplnění je Hilbertovým prostorem: tak lze každý unitární prostor X vnořit „přirozeným způsobem" do nějakého Hilbertova prostoru H, který není „příliš veliký", takže pro něj platí $\overline{X} = H$.

Příklad 5.1.14. Nyní máme k dispozici jeden velmi důležitý příklad Hilbertova prostoru, který *nemá* konečnou dimenzi. Je možné, že je pouze speciálním případem obecnější situace, se kterou jste se již setkali. Uvedeme bez důkazů některá další důležitá fakta, navazující na látku z teorie míry a integrálu, která později použijeme. Týkají se prostorů $\mathcal{L}_2$. Budeme pracovat s prostorem (tříd) funkcí, pro které je pro $-\infty < a < b < \infty$

$$\|f\|_2^2 := \int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < \infty\,. \tag{5.13}$$

Označíme $\mathcal{L}_2((a,b))$ prostor tříd reálných (resp. komplexních) funkcí definovaných λ-skoro všude na (a,b), pro něž platí (5.13). Zde pracujeme s *třídami funkcí* podle rovnosti λ-skoro všude, kde λ je Lebesgueova míra v $\mathbb{R}$, běžně se však nerozlišuje mezi těmito třídami a funkcemi, které je reprezentují. Tento prostor je vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému pomocí

$$(f, g) := \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\ . \tag{5.14}$$

prostorem se skalárním součinem. Tzv. *Hölderova nerovnost* má pro tento speciální případ tvar

$$\int_a^b \big|f(t)g(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq \Big(\int_a^b \big|f(t)\big|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_a^b \big|g(t)\big|^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2}\ .$$

Pro další výklad je zejména podstatné, že $\mathcal{L}_2((a,b))$ je Hilbertův prostor, tj. že je *úplný*. Toto tvrzení, které je mimořádně důležité, dokazovat nebudeme. Poznamenáváme, že právě v něm hraje prominentní roli Lebesgueův integrál.

Shrňme tedy všechny tyto připomenuté poznatky do následujícího tvrzení:

Věta 5.1.15. *Prostor $\mathcal{L}_2((a,b))$ je úplný, separabilní a je to vzhledem ke skalárnímu součinu definovanému pomocí* (5.13) *Hilbertův prostor.*

K uvedeným příkladům se ještě vrátíme, nyní dokážeme několik obecných tvrzení o Hilbertových prostorech.

Lemma 5.1.16. *Nechť H je Hilbertův prostor, $y_0 \in H$. Zobrazení $x \mapsto (x, y_0)$, $x \mapsto (y_0, x)$, $x \mapsto \|x\|$ jsou (při pevně zvoleném y_0) stejnoměrně spojitá na H. Zobrazení $[\,x, y\,] \mapsto (x, y)$, kde dvojici $[\,x, y\,]$ přiřazujeme hodnotu skalárního součinu (x, y), je spojité zobrazení $H \times H$ do $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$).*

Důkaz. Začneme se stejnoměrnou spojitostí všech tří zobrazení z první části tvrzení najednou. Snadno užitím (5.1) dostaneme odhady

$$|(x, y_0) - (x_0, y_0)| \le \|y_0\|\,\|x - x_0\|\ , \quad |(y_0, x) - (y_0, x_0)| \le \|y_0\|\,\|x - x_0\|\ ;$$

z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\big|\,\|x\| - \|x_0\|\,\big| \le \|x - x_0\|\ .$$

Z těchto nerovností vyplývá stejnoměrná spojitost všech tří zkoumaných zobrazení (zobrazení jsou dokonce lipschitzovská). Nakonec dokážeme spojitost skalárního součinu. Snadno ověříme přímým výpočtem

$$\begin{aligned}(x - x_0, y - y_0) &= (x, y) - (x, y_0) - (x_0, y) + (x_0, y_0) = \\ &= (x, y) - (x_0, y_0) - (x - x_0, y_0) - (x_0, y - y_0)\ ,\end{aligned}$$

z čehož dostaneme pomocí (5.1) a již odvozených nerovností

$$\big|\,(x, y) - (x_0, y_0)\,\big| \le \|x - x_0\|\,\|y - y_0\| + \|x_0\|\,\|y - y_0\| + \|y_0\|\,\|x - x_0\|\,,$$

a tedy i prvou část tvrzení. □

Tvrzení 5.1.17. *V Hilbertově prostoru H platí pro každou dvojici prvků $x, y \in H$*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\big)\,. \tag{5.15}$$

Důkaz. Stačí sečíst rovnosti

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)\,, \\ \|x - y\|^2 &= (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y)\,,\end{aligned}$$

a po úpravě dostaneme okamžitě (5.15). □

Poznámka 5.1.18. Je zajímavé, že tímto vztahem je „hilbertovská norma“ plně charakterizována. Každou normu s právě popsanými vlastnostmi lze generovat pomocí vhodného skalárního součinu. Např. jde-li o normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$, stačí položit (předchozí rovnosti nyní odečteme)

$$(x, y) := \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}\,.$$

V „komplexním případě“ je to trochu složitější; tento fakt však nebudeme v dalším k ničemu potřebovat, je však užitečné ho znát. Geometricky je podmínka (5.15) zajímavá a bývá nazývána *rovnoběžníkové pravidlo.* Doporučujeme čtenáři načrtnout si obrázek a uvážit, co víme v rovnoběžníku o vztahu délek jeho stran a úhlopříček. Konečně stojí za povšimnutí, že podmínka se ověřuje v (maximálně) dvourozměrném podprostoru generovaném prvky x, y. Je-li tedy *každý* nejvýše dvourozměrný podprostor *úplného* normovaného lineárního prostoru Hilbertovým prostorem, je také celý prostor Hilbertovým prostorem.

Věta 5.1.19. *Nechť M je* neprázdná, konvexní *a* uzavřená *podmnožina Hilbertova prostoru H. Potom pro každé $x \in H$ existuje* právě jedno *$y \in M$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, M)$.*

Důkaz. Existuje posloupnost $\{y_n\} \in M$ tak, že $\|x - y_n\| \to d := \operatorname{dist}(x, M)$. Potom z (5.15) plyne vzhledem k $\|y_m - y_n\| = \|\,(y_m - x) - (y_n - x)\,\|$ odhad

$$\begin{aligned}\|\,(y_n - x) - (y_m - x)\,\|^2 &= 2\left(\,\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\,\right) - \|\,y_n + y_m - 2x\,\|^2 = \\ &= 2\left(\,\|y_n - x\|^2 + \|y_m - x\|^2\,\right) - 4\left\|\,\frac{y_n + y_m}{2} - x\,\right\|^2 \le \\ &\le 2\left(\,\|y_m - x\|^2 + \|y_n - x\|^2\,\right) - 4\,d^2\,,\end{aligned}$$

z něhož plyne, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská. Označme její limitu y; je $y_n \to y$, $y \in M$ a $\|x - y\| = d$. Pokud by existovaly dva prvky y, z s touto vlastností, musela by podle předcházející úvahy být též cauchyovská posloupnost $\{y, z, y, z, \dots\}$. Musela by tedy být i konvergentní, z čehož již plyne $y = z$. □

Označení 5.1.20. Jestliže pro $x, y \in H$ platí $(x, y) = 0$, říkáme, že x, y jsou *ortogonální*; píšeme pak $x \perp y$. Jestliže pro všechna $x \in A, y \in B$ je $x \perp y$, píšeme $A \perp B$ a množiny A, B nazýváme též *ortogonální.* Množinu *všech* $y \in H$, pro které je $y \perp A$ (tak zkráceně zapisujeme $\{y\} \perp A$), značíme $A^\perp$; podobně píšeme $x^\perp$ místo $\{x\}^\perp$.

Poznámka 5.1.21 (důležitá). Z linearity skalárního součinu a jeho spojitosti plyne, že pro každé $x \in H$ platí:

(1) $x^\perp$ *je lineární podprostor* H a (2) $x^\perp$*je uzavřený.*

Odtud jednoduše plyne následující tvrzení:

Důsledek 5.1.22. *Množina* $M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp$ *je uzavřený podprostor* H *pro* každou *množinu* $M \subset H$.

Věta 5.1.23. *Nechť* M *je uzavřený lineární podprostor v* H*. Potom existuje dvojice* lineárních *zobrazení* P, Q

$$P : H \to M\,, \qquad Q : H \to M^\perp \tag{5.16}$$

takových, že pro všechna $x \in H$ *platí:*

(1) $x = Px + Qx$*;*

(2) $x \in M \implies Px = x\,,\ Qx = 0$*;*

(3) $x \in M^\perp \implies Px = 0\,,\ Qx = x$*;*

(4) *zobrazení* P, Q *jsou určena jednoznačně;*

(5) $\|x - Px\| = \operatorname{dist}(x, M)$*;*

(6) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Důkaz. Je-li $x \in H$, je $x + M := \{x + y;\ y \in M\}$ konvexní uzavřená množina. Položme $Qx\colon = z$ pro to $z \in x + M$, pro jehož normu platí

$$\|z\| = \|z - 0\| = \operatorname{dist}(0, x + M) = \operatorname{dist}(x, M)\,;$$

Věta 5.1.19 zaručuje existenci a jednoznačnost takového prvku z. Dále definujme Px rovností $Px\colon = x - Qx$. Pak zřejmě platí rovnost (1). Z $Qx \in x + M$ plyne $Px = x - Qx \in M$ a tedy $P : H \to M$.

Ukažme, že $(Qx, y) = 0$ pro všechna $y \in M$; to ale stačí ukázat pro ta y, pro něž $\|y\| = 1$. Z definice $Qx = z$ plyne pro každý skalár α

$$\|z\|^2 = (z, z) \le \|\,z - \alpha y\,\|^2\,, \quad \text{a tedy} \quad 0 \le -\alpha(y, z) - \overline{\alpha}(z, y) + |\alpha|^2\,.$$

Dosadíme $\alpha = (z, y)$, z čehož po úpravě obdržíme $0 \le -|(z, y)|^2$. Odtud již vyplývá rovnost $(z, y) = (Qx, y) = 0$. Tím jsme ověřili, že zobrazení P, Q zobrazují H dle (5.16). Zřejmě též platí (2) a (3).

Rozložme $x \in H$ na součet $x = x_1 + x_2$, kde $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$. Potom je

$$Px + Qx = x_1 + x_2 \,, \quad \text{resp.} \quad Px - x_1 = x_2 - Qx \,.$$

Pak ale $Px - x_1 \in M$, $x_2 - Qx \in M^\perp$ a

$$(Px - x_1, x_2 - Qx) = (Px, x_2) + (x_1, Qx) - (x_1, x_2) - (Px, Qx) = 0$$

a tedy $Px = x_1$, $Qx = x_2$; tím je dokázána jednoznačnost. Použitím analogické úvahy o rozkladu pro lineární kombinaci $\alpha x + \beta y$ dostaneme linearitu P, Q: Je

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y) \,, \\ x = Px + Qx \,, &\qquad y = Py + Qy \,, \end{aligned}$$

a tedy

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y) \,.$$

Odtud již plyne linearita obou zobrazení.

Konečně zbývá zdůvodnit poslední rovnost tvrzení, která je opět důsledkem ortogonality:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|Px + Qx\|^2 = (Px + Qx, Px + Qx) = \\ &= \|Px\|^2 + (Px, Qx) + (Qx, Px) + \|Qx\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2 \,. \end{aligned}$$

Tím je důkaz celého tvrzení dokončen. □

Poznámky 5.1.24. (1) Předcházející tvrzení lze zobecnit na konečný počet vzájemně ortogonálních uzavřených podprostorů H.
(2) Pokud je $M \neq H$, pak existuje *nenulové* $z \in H$, $z \perp M$, neboť pro $x \in H \setminus M$ je $x = y + z$ a $z \neq 0$. Prostor $M^\perp$ je tedy netriviálním podprostorem H.
(3) Lineární zobrazení A lineárního prostoru X do X, pro které platí

$$A^2(x) = (A \circ A)(x) = Ax \ \text{ pro všechna } \ x \in X$$

se nazývají *projekce* (na $A(X)$). Zobrazení P, Q jsou zřejmě (speciální) projekce a nazývají se *ortogonální projekce* prostoru H na M a $M^\perp$.

Definice 5.1.25. Řekneme, že $\{x_\alpha \,;\ \alpha \in A\}$ je *ortonormální systém* (též: *ortonormální množina*), pokud

$$\|x_\alpha\| = 1 \text{ pro všechna } \alpha \in A$$

a vektory x_α jsou *po dvou ortogonální*, tj. použijeme-li Kroneckerova symbolu $\delta_{\alpha\beta} = 1$ pro $\alpha = \beta$ a $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pro $\alpha \neq \beta$, platí rovnost

$$(x_\alpha, x_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \,, \quad \alpha, \beta \in A \,.$$

Definice 5.1.26. Maximální ortonormální množinu v Hilbertově prostoru H nazýváme *ortonormální báze Hilbertova prostoru*. Podrobněji: Je to taková ortonormální množina $B \subset H$, pro kterou platí: je-li B_1 ortonormální množina v H, $B \subset B_1$, potom $B = B_1$.

Dvouslovný název *ortonormální báze*, se kterým v Hilbertově prostoru budeme pracovat, je „nedělitelný“. Báze lineárního prostoru [2]) a ortonormální báze jsou podstatně rozdílné pojmy. Každý ortonormální systém $\{x_k\}$ je tvořen lineárně nezávislými vektory. Je-li totiž $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, pak postupným násobením

[2]) Někdy se užívá pro rozlišení širšího názvu *lineární báze* nebo *Hamelova báze*.

prvky $x_1, \dots ,x_n$ dostaneme $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Podstatný rozdíl se však projeví v nekonečně rozměrném prostoru.

Následující látka spadá do algebry, proto se omezíme jen na její popis. Vzniká přirozená otázka, jak lze ortonormální systém v nějakém Hilbertově prostoru H získat. Každý konečný lineárně nezávislý systém A prvků unitárního prostoru lze nahradit ortonormálním systémem B tak, aby pro jejich lineární obaly platila rovnost $\mathrm{Lin}\,[\,A\,] = \mathrm{Lin}\,[\,B\,]$. To se prakticky provádí pomocí tzv. *Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu.* Při něm se postupně z báze H sestrojuje ortonormální systém, přičemž každý krok procesu přímo souvisí s konstrukcí, se kterou jsme se setkali ve Větě 5.1.23 a se kterou budeme ještě pracovat.

Je-li např. $\{y_k\}$ nekonečná posloupnost lineárně nezávislých prvků H a jsou-li již nalezeny ortonormální prvky $x_1, \dots , x_n$ tak, že platí rovnost

$$\mathrm{Lin}\,[\,x_1, \dots , x_n\,] = \mathrm{Lin}\,[\,y_1, \dots , y_n\,]\,,$$

pak sestrojíme k y_{n+1} prvky y a z podle Věty 5.1.23, kde je

$$y = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k \ , \quad z = x - y \ ,$$

a položíme $x_{n+1} = z/\|z\|$. O lineární bázi platí toto důležité tvrzení: *V každém lineárním prostoru X existuje (lineární) báze*, což je podle definice taková množina A lineárně nezávislých prvků, pro kterou lineární obal $\mathrm{Lin}[\,A\,]$ je roven X. *Každý lineárně nezávislý systém lze doplnit na bázi.*

Důkaz existence báze A se provádí např. pomocí Zornova lemmatu či podobného aparátu. Poznamenejme, že báze A je *maximální množinou* lineárně nezávislých prvků v následujícím smyslu: Pokud existuje $A_1 \subset X$, $A \subset A_1$ a A_1 je lineárně nezávislá, pak $A = A_1$.

Tvrzení 5.1.27. *Každou ortonormální množinu $B \subset H$ lze doplnit na maximální ortonormální množinu, tj. ortonormální bázi.*

Tato věta se dokazuje podobně jako věta o existenci báze lineárního prostoru na základě Zornova lemmatu nebo některého jiného tvrzení s ním ekvivalentního (jsou to tvrzení ekvivalentní axiomu výběru). Ani tuto větu dokazovat nebudeme.

Je vhodné si uvědomit, že v „algebraickém" případě pracujeme s *konečnými lineárními kombinacemi* bez jakékoli topologie, ve druhém využíváme i topologické vlastnosti prostoru. Vágně řečeno, pracujeme s *nekonečnými* lineárními kombinacemi. Proto též obecně dimenze prostoru H, tj. mohutnost jeho *báze*, může být větší než mohutnost jeho *ortonormální báze.* Uvědomte si rozdíl mezi

$$\mathrm{Lin}\,[\,A\,] = H \quad \text{a} \quad \overline{\mathrm{Lin}\,[\,A\,]} = H\,.$$

V $\mathbb{R}^m$ je ortonormální báze zároveň bází, avšak např.v „reálném" l_2 tvoří vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots)$, ... maximální ortonormální množinu B. Lineární obal $\mathrm{Lin}\,[\,B\,]$ této množiny je však tvořen pouze takovými posloupnostmi $x = (x_1, x_2, \dots)$, pro něž je $\{k \in \mathbb{N}; x_k \neq 0\}$ *konečná množina.* Všechny takové posloupnosti tvoří lineární podprostor prostoru l_2, který je *vlastním podprostorem* l_2. Naproti tomu pro každé $x \in l_2$ je

$$x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{1}^{\infty} x_k \mathbf{e}_k\,, \quad x \in l_2\,.$$

V tomto případě ortonormální báze B není (lineární) bází l_2.

Poznámka 5.1.28. Promyslete si následující zobecnění: Je-li A libovolná množina, uvažujte charakteristické funkce φ_U jejích podmnožin U. Potom charakteristické funkce jednobodových množin jsou zřejmě lineárně nezávislé a jejich lineární obal tvoří prostor charakteristických funkcí *konečných* podmnožin A. V lineárním prostoru X všech charakteristických funkcí podmnožin A umíme pracovat bez obtíží (nemáme potíže s operacemi), ty nastanou při snaze o definici skalárního součinu. Zamyslete se nad problémy, které bychom museli řešit, pokud bychom definovali „přirozeně" pro charakteristické funkce množin $U, V \subset A$ skalární součin

$$(\varphi_U, \chi_V) : = \sum_{t \in A} \varphi_U(t) \varphi_V(t) \,.$$

Tento problém vyřešíme tím, že se omezíme na speciální případ *separabilních* Hilbertových prostorů, dříve však dokážeme ještě jedno důležité tvrzení, které platí obecně.

Věta 5.1.29 (Rieszova věta o reprezentaci). *Je-li f je* spojitý *lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H, pak existuje právě jeden prvek $y_f \in H$ tak, že pro všechna $x \in H$ platí*

$$f(x) = (x, y_f) \,.$$

Důkaz. Je-li $f \equiv 0$, položíme $y_f = 0$. V opačném případě je

$$M = \{x \in H \,;\ f(x) = 0\}$$

uzavřený podprostor H, přičemž $M^\perp \neq \emptyset$ (neboť $M \neq H$). Zvolme $z \in M^\perp$, $\|z\| = 1$ a položme

$$u = f(x) z - f(z) x \,.$$

Protože je $f(u) = f(x)f(z) - f(z)f(x) = 0$, je $u \in M$ a $(u, z) = 0$. Odtud vyplývá $(u, z) = f(x)(z, z) - f(z)(x, z) = 0$, z čehož dostaneme

$$f(x) = f(x)(z, z) = f(z)(x, z) = (x, \overline{f(z)} z) \ .$$

Stačí tedy položit $y_f = \overline{f(z)} z$. Jednoznačnost se dokáže jednoduše: Pokud existují dva prvky y, y' s popsanou vlastností, pak pro všechna $x \in H$ platí

$$0 = (x, y) - (x, y') = (x, y - y') \,,$$

tedy i $(y - y', y - y') = 0$. Odtud plyne $y = y'$, čímž je důkaz dokončen. □

Lemma 5.1.30. *Nechť je prostor H separabilní a nechť A je ortonormální systém v H. Potom je systém A spočetný* [3]).

Důkaz. Jestliže $\|x\| = \|y\| = 1$ a $x \perp y$, pak

$$(x - y, x - y) = (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2 \ ,$$

a tedy $\delta := \| x - y \| = \sqrt{2}$. Protože existuje *spočetná* S taková, že $\overline{S} = H$, lze pro každé $x \in A$ zvolit takové $z_x \in S$, že $\| x - z_x \| < \delta/3$. Pro různá $x, y \in A$ je

$$\delta = \|x - y\| \leq \|x - z_x\| + \|z_x - z_y\| + \|z_y - y\| < 2\delta/3 + \|z_x - z_y\| \,,$$

a tedy $\|z_x - z_y\| > \delta/3$ a zobrazení $x \mapsto z_x$ je prosté. Jelikož existuje prosté zobrazení množiny A do S, je množina A spočetná. □

Úmluva 5.1.31. Budeme pracovat s ortonormálními systémy vektorů v Hilbertově prostoru H; všude v dalším výkladu *budeme bez upozornění předpokládat, že tento prostor H je separabilní.* Hilbertův prostor nemusí být separabilní, tím se však, jak jsme již viděli, některé úvahy zkomplikují. I když jde o komplikaci pouze technického rázu, vyhneme se jí.

[3]) Tedy konečný nebo nekonečný spočetný, lze ho tedy indexovat prvky $\mathbb{N}$, případně $\mathbb{Z}$.

Lemma 5.1.32. *Nechť $\{x_k; k = 1,\dots,n\}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H. Potom pro libovolné skaláry $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ z pole příslušného k H platí*

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k \Big\| \le \Big\| x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \Big\| .$$

Důkaz. Dokážeme, že platí

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k \Big\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, \alpha_k - (x,x_k)\,|^2 = \Big\| x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \Big\|^2 .$$

Spočteme nejprve

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |\, \alpha_k - (x,x_k)\,|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - (x,x_k))\,\overline{(\alpha_k - (x,x_k))} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(|\alpha_k|^2 - \alpha_k\overline{(x,x_k)} - \overline{\alpha}_k(x,x_k) + |(x,x_k)|^2 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(|\alpha_k|^2 - \alpha_k(x_k,x) - \overline{\alpha}_k(x,x_k) + |(x,x_k)|^2 \right) .\end{aligned}$$

Nyní již snadno dostaneme rovnost

$$\begin{aligned}\Big\| x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k \Big\|^2 &= \Big(x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\,,\, x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\Big) = \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x_k,x) - \sum_{k=1}^{n}\overline{\alpha_k}\,(x,x_k) + \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2 = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\, \alpha_k - (x,x_k)\,|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2 .\end{aligned}$$

Druhý člen ve výrazu na pravé straně rovnosti je nezáporný a nabývá hodnoty 0, právě když platí

$$\alpha_k = (x,x_k)\,, \quad k = 1,\dots,n\,. \tag{5.17}$$

Zbytek je zřejmý. □

Definice 5.1.33. Je-li $\{x_k\,;\ k \in \mathbb{N}\} = \{x_k\}$ ortonormální systém v Hilbertově prostoru H, pak číslům (x,x_k) říkáme *Fourierovy koeficienty* vzhledem k systému $\{x_k\,;\ k \in \mathbb{N}\}$. Budeme je značit

$$\widehat{x}(k) = (x,x_k)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Důsledek 5.1.34 (Besselova nerovnost). *Nechť $\{x_k\}$ je ortonormální systém v (separabilním) Hilbertově prostoru H a nechť $x \in H$ a $\widehat{x}(k) = (x,x_k)$. Potom platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}(k)|^2 \le \|x\|^2 \,. \tag{5.18}$$

Důkaz. K (5.18) dospějeme takto: je-li H Hilbertův prostor a $\{x_k\,;\, k = 1,\dots,n\}$ je ortonormální systém v H, odvodili jsme pro každé $x \in H$

$$\|x - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{n}|\alpha_k - (x,x_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2 .$$

Odtud dostáváme volbou Fourierových koeficientů na místě α_k

$$\sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2 = \|x\|^2 - \|x - \sum_{k=1}^{n}(x,x_k)x_k\|^2, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{k=1}^{n} |(x,x_k)|^2 \leq \|x\|^2 \ .$$

Přechodem k supremu na levé straně plyne odtud (5.18). □

Poznámka 5.1.35 (důležitá). Vzhledem k tomu, že máme k dispozici pojem konvergence v Hilbertově prostoru, lze snadno definovat součet řady prvků H. Víme totiž, jak definovat $y_m\colon = \sum_{k=1}^{m} x_k$ a kdy $y_n \to y$. Můžeme tedy zacházet s řadami v H, aniž budeme budovat rozsáhlejší teorii. Budou nás zajímat řady speciálního tvaru. Je-li $B = \{x_k\}$ ortonormální množina v H a konverguje-li řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \ ,$$

k $y \in H$, pak pro $y_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ je zřejmě $\alpha_k = (y_m, x_k)$ a

$$\|y_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |(y_m, x_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k|^2.$$

Odtud plyne, že pokud řada konverguje k y, musí platit

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|y\|^2 \ ,$$

neboli v Besselově nerovnosti nastává rovnost a posloupnost $\{\alpha_k\}$ je prvkem l_2. Snadno též nahlédneme, že při daném ortonormálním systému $\{x_k\}$ je prvek $\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)\, x_k$ jednoznačně určen pomocí $\widehat{x} : k \mapsto (x, x_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Rovnost $\widehat{x}(k) = (x, x_k)$ definuje spojitý lineární funkcionál a proto je zobrazení $F : H \to l_2$, přiřazující $x \mapsto \widehat{x}$, lineární. Z nerovnosti

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}(k) - \widehat{y}(k)|^2 \leq \|x - y\|^2$$

plyne, že toto zobrazení F je spojité.

Důležitou otázkou je zkoumat, zda a kdy je v předchozím kontextu F zobrazením *na* l_2 a izometrií. Důkaz následující věty se zdá lehký jen proto, že pracujeme s úplným prostorem.

Věta 5.1.36 (F. Riesz, Fischer 1907). *Nechť $\{x_k\} \subset H$ je ortonormální systém a nechť $\varphi(k) \in l_2$. Potom existuje $y \in H$ tak, že je $\varphi = \widehat{y}$, řada $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k) x_k$ konverguje v H a platí*

$$\| \, y \, \| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(k)|^2 \Big)^{1/2} .$$

Důkaz. Označme $y_n := \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) x_k$. Potom pro $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, platí

$$\| \, y_m - y_n \, \|^2 = \Big(\sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) x_k \, , \sum_{k=n+1}^{m} \varphi(k) x_k \Big) = \sum_{k=n+1}^{m} \big| \, \varphi(k) \, \big|^2 \ .$$

Protože však řada $\sum_{k=1}^{\infty} |\, \varphi(k) \,|^2$ konverguje, je poslední součet v předchozím vztahu libovolně malý pro všechna $m > n$, jakmile je $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké. Je tedy $\{y_n\}$ cauchyovská posloupnost, která v úplném prostoru l_2 konverguje k nějakému $y \in l_2$, čímž je důkaz dokončen; zde jde prakticky o odhad zbytkem konvergentní řady po n-tém členu. □

Dokázali jsme tedy, že *s ohledem na úplnost* H je zobrazení $F : H \to l_2$ vždy *na*. Nás samozřejmě nejvíce zajímá, kdy lze *každé* $x \in H$ v separabilním (nekonečněrozměrném) Hilbertově prostoru vyjádřit pomocí určité ortonormální množiny $D = \{x_k\}$, a to ve tvaru

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k) x_k \,,$$

což je *Fourierova řada v* H vzhledem k ortonormální množině D.

Na závěr naše poznatky shrneme do jediné věty a uvedeme je do vzájemné souvislosti. Pak si již jen uvědomíme, co odtud z vybudované abstraktní teorie dostaneme pro „klasické" Fourierovy řady.

Věta 5.1.37. *Nechť* $B := \{w_k\} \subset H$ *je ortonormální v* H*. Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *B je ortonormální báze Hilbertova prostoru H;*

(b) *všechny* konečné *lineární kombinace prvků z B tvoří hustou podmnožinu H, tj.* $\overline{\mathrm{Lin}[\,B\,]} = H$*;*

(c) *jestliže pro všechna w_k, $k \in \mathbb{N}$, platí $(x, w_k) = 0$, pak $x = 0$;*

(d) *pro všechna $x \in H$ je $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k$;*

(e) *pro všechna $x, y \in H$ je*

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}(k)\, \overline{\widehat{y}(k)} \,.$$

(f) *pro všechna $x \in H$ platí tzv. Parsevalova rovnost*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \big|\, \widehat{x}(k) \,\big|^2 \tag{5.19}$$

Důkaz. Dokážeme postupně sérii implikací $(a) \Rightarrow \ldots \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Zřejmě je $\mathrm{Lin}\,[\,B\,]$ lineární podprostor H a proto je $\overline{\mathrm{Lin}\,[\,B\,]}$ uzavřený lineární podprostor H, neboť snadno ověříme, že

$$x_n \to x,\ y_n \to y \Rightarrow\ x_n + y_n \to x + y\,, \ldots;$$

operace sčítání a násobení skalárem ve zřejmém smyslu spojité na H. Při $\overline{\mathrm{Lin}[\,B\,]} \neq H$ je $\overline{\mathrm{Lin}[\,B\,]}^{\perp}$ netriviální a tedy B není maximální, což dává ekvivalentní výrok non $(b) \Rightarrow$ non (a).

$(b) \Rightarrow (c)$: Jestliže platí $(x, w_k) = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, je i $(x, y) = 0$ pro každé $y \in \mathrm{Lin}\,[\,B\,]$ a ze spojitosti skalárního součinu i pro každé $y \in \overline{\mathrm{Lin}[\,B\,]} = H$, tedy je i $(x, x) = 0$ a $x = 0$.

$(c) \Rightarrow (d)$: Pro každé $w_l \in B$ a každé $x \in H$ dostáváme

$$\Big(x - \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k) w_k \,,\, w_l\Big) = (x, w_l) - \sum_{k=1}^{\infty} (x, w_k)(w_k, w_l) =$$
$$= (x, w_l) - (x, w_l) = 0 \;,$$

což dává potřebné tvrzení.

$(d) \Rightarrow (e)$: Pro každé dva prvky $x, y \in H$ dostáváme

$$(x,y) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (w_k, x) w_k \,,\ \sum_{l=1}^{\infty} (w_l, y) w_l \Big) =$$
$$= \sum_{[k,l]} (x, w_k,)(w_k, w_l)\overline{(y, w_l)} = \sum_{m=1}^{\infty} (x, w_m)\overline{(y, w_m)} \ .$$

$(e) \Rightarrow (f)$: Nyní stačí do tvaru z (e) dosadit $x = y$.

$(f) \Rightarrow (a)$: Budeme postupovat sporem: Předpokládejme, že existuje nenulové $z \in H \setminus B$, $\|z\| = 1$. Uvažujme ortonormální množinu $B_1 = B \cup \{z\}$. Pomocí (f) a Besselovy nerovnosti dostaneme

$$\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 < \sum_{k=1}^{\infty} |(z, w_k)|^2 + |(z,z)|^2 = \|z\|^2$$

Nalezený spor ukazuje, že B je maximální.

Tím je důkaz „kolečka implikací“ a tedy i tvrzení věty dokončen. □

Příklad 5.1.38. Teorii, se kterou jsme se seznámili, lze aplikovat na klasický případ Fourierových řad. Je však nutná jistá opatrnost související s tím, že jsme používali některá označení ve dvojím významu (např. Fourierovy koeficienty apod.). V dalším budeme užívat označení $\mathcal{L}_p(2\pi)$ pro 2π-perodické funkce z prostoru (tříd) funkcí $\mathcal{L}_p$, tj. funkcí s konvergentním Lebesgueovým integrálem na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Systém funkcí $\{1,\ \cos kx,\ \sin\ kx\}_{k=1}^{\infty}$ je tvořen funkcemi v $\mathcal{L}_2(2\pi)$, které jsou ortogonální; tyto funkce však nejsou ortonormální. Odpovídající ortonormální systém je (pracujeme s normou z $\mathcal{L}_2(2\pi)$!)

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \Big\}_{k=1}^{\infty}.$$

Protože trigonometrické polynomy tvoří hustou podmnožinu $\mathcal{L}_2(2\pi)$, je splněna podmínka (b) z Věty 5.1.37, a tedy i kterákoli z podmínek téže věty.

Pro Fourierovy koeficienty ve smyslu teorie Hilbertových prostorů platí např.

$$\Big(f, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \Big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, coskt \,\mathrm{d}t \ ,$$

takže odpovídající koeficient a_k v „klasické teorii“ je roven tomuto číslu až na faktor $1/\sqrt{\pi}$. Obdobný vztah platí i pro ostatní koeficienty; připomeňme ještě, že „absolutní člen“ jsme v klasické teorii psali ve tvaru $a_0/2$.

Pro funkci z $\mathcal{L}_2(2\pi)$ tak dostaneme rovnost (a je reálné číslo)

$$\int_a^{a+2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \pi \Big(\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \Big) \,, \tag{5.20}$$

která je pouze přepisem Parsevalovy rovnosti (5.19) z podmínky (f) z Věty 5.1.37. Tuto rovnost lze využít například k výpočtu normy funkce f v $\mathcal{L}_2(2\pi)$, známe-li její Fourierovy koeficienty a umíme sečíst řadu na pravé straně rovnosti (5.20), nebo k sečtení hodnoty téže řady v případě, že naopak známe hodnotu integrálu v (5.20) vlevo.

Označíme-li a'_k, b'_k, $k \in \mathbb{N}_0$ Fourierovy koeficienty funkce $g \in \mathcal{L}_2(2\pi)$ a budeme-li předpokládat, že obě funkce f, g jsou reálné, můžeme pro ně odvodit vzorec

$$\int_a^{a+2\pi} f(t)\, g(t) dt = \pi \Big(\frac{a_0 a'_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k a'_k + b_k b'_k) \Big) \,.$$

Čtenář si již vcelku snadno „přeloží“ další výsledky.

Pro funkce z $\mathcal{L}_2(2\pi)$ vychází tedy celá teorie velmi elegantně a jejich Fourierovy řady konvergují bodově skoro všude ve smyslu Lebesgueovy míry. Výše popsanými prostředky však přesnější informaci o množině bodů, v níž řada konverguje, nemáme. Tu při výlučném použití teorie Hilbertových prostorů získat nemůžeme.

Příklad 5.1.39 (Legendreovy polynomy). Výše probraná teorie však dává jistou informaci např. pro různé systémy ortogonálních polynomů. V obecné poloze jde o vyšetřování systémů funkcí, jejichž skalární součin je definován vzorcem

$$(f,g) = \int_a^b V(t)\, f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t \ ,$$

kde $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je jistý interval a V je kladná (a konečná) funkce na (a,b); ta se nazývá *váha*. Pro přiblížení těchto speciálních tříd si blíže všimneme ortogonálních polynomů. které se nazývají *Legendreovy polynomy.* V tom případě je (a,b) omezený interval v $\mathbb{R}$ a váha V je identicky rovna 1. Podrobnější informaci nalezne zvídavý čtenář v [34].

Označíme hledané Legendreovy polynomy symbolem P_n, kde n je stupeň polynomu P_n. Zřejmě lze P_n zapsat jako n-tou derivaci polynomu Q_n, který je stupně $2n$. Potom pro každý polynom R stupně nižšího než n platí (užíváme metodu *per-partes*)

$$\int_a^b P_n(t)R(t)\,\mathrm{d}t \ = \int_a^b Q_n^{(n)}(t)R(t)\,\mathrm{d}t \ =$$
$$= \left[Q_n^{(n-1)}(t)R(t) - Q_n^{(n-2)}(t)R'(t) + \cdots \pm Q_n(t)R^{(n-1)}(t)\right]_{t=a}^{b}$$

Z podmínky ortogonality plyne, že by tento výraz měl být roven 0. To nastane například tehdy, jestliže bude mít polynom Q_n za n-násobné kořeny krajní body a, b. Definujeme tedy $Q_n(t) = A_n(t-a)^n(t-b)^n$, kde dle zvyku klademe $A_n = 1/(2^n n!)$, takže

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}((t-a)(t-b))^n \,.$$

Platí

$$\int_a^b P_n^2(t)dt = \int_a^b Q_n^{(n)}(t)Q_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \ =$$
$$= \left[Q_n^{(n)}Q_n^{(n-1)} - Q_n^{(n+1)}Q_n^{(n-2)} + \cdots \pm Q_n^{(2n-1)}Q_n\right]_a^b \pm \int_a^b Q_n^{(2n)}(t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Závorka je rovna 0, takže vpravo zbude poslední integrál, který je roven

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_a^b (t-a)^n(t-b)^n\,\mathrm{d}t \ .$$

Další n-násobná aplikace metody per-partes dá

$$\int_a^b P_n^2(t)dt = \frac{(b-a)^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)} \,.$$

Položíme-li $(a,b) = (-1,1)$ a ponecháme-li všechno ostatní označení, dostaneme

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((x^2-1)^n\big)\,, \quad \int_{-1}^1 P_n^2(t)\,\mathrm{d}t \ = \frac{2}{2n+1}\,.$$

Pro tyto polynomy lze odvodit různé rekurentní formule; srv. např. [34], Věty 212 a 213 :

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0\,,$$

odkud vyplývá

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2},\ P_3(t) = \frac{5t^3}{2} - \frac{3}{2}t,\ \cdots .$$

Legendreovy polynomy splňují pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ diferenciální rovnici

$$(1 - t^2)P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0 .$$

Příklad 5.1.40 (Čebyševovy polynomy). Tyto polynomy tvoří rovněž ortogonální systém v $(-1, 1)$ vzhledem k váze $V(t) = (1 - t^2)^{-1/2}$. Přístup k nim je různý. Jsou to například polynomy s koeficientem 1 u „nejvyšší mocniny“ x^n, které nejlépe aproximují v suprémové normě identicky nulovou funkci na intervalu $[-1, 1]$. Lze je vyjádřit vzorcem

$$T_0(t) = 1, \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t) .$$

Jiný přístup k ortogonálním polynomům je možný přes tzv. *vytvořující funkce*.